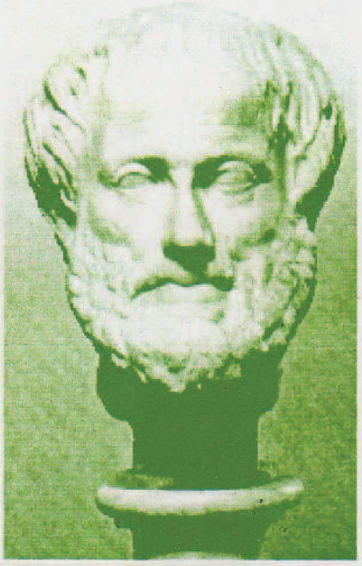
Serie VIII Volume 1 Numero 4 ottobre - dicembre 2001

Rivista trimestrale Sped. in abb. Postale comma 20/c art. 2 legge 622/96 CPR Teramo CPO

Periodico di matematiche

Organo della MATHESIS

Società italiana di scienze matematiche e fisiche
fondata nel 1895



ARISTOTELE
384-322 a.C.

...identita,
non-contradizione,
terzo escluso...

All'interno:

Direttore:
Franco Eugeni

Direttore editoriale:
Antonio Maturo

Mathesis

Una dimostrazione euclidea della proprietà di riflessione del paraboloide

Franco Gioacchino

Sunto: Ecco una dimostrazione euclidea di una proprietà del paraboloide, che contiene anche la costruzione con riga e compasso della tangente a una parabola in un suo punto qualsiasi; sarà sicuramente interessante e proficuo affiancare la trattazione tradizionale dell'argomento con l'utilizzo del quaderno elettronico interattivo Cabri Geometre II.

Abstract: The growing diffusion in our families of "parabolas" for receiving satellitar television channels can be the initial cue to bring high-school students to analyze geometric property which is the base of the operation of these antennas.
Here is an Euclidean demonstration of that property, which includes also the construction with square and compass of the tangent at parabola in any of its points. It will be surely interesting and profitable to accompany the traditional exposition of the issue with the use of interactive electronic notebook "Cabri Geometre II".

1. Dalla geometria euclidea all'ottica geometrica

Definizione 1 Dicesi PARABOLA il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti da un punto F, detto FUOCO, e da una retta d, detta DIRETTRICE.

Lemma 1 Due punti distinti di una parabola hanno proiezioni distinte sulla direttrice.

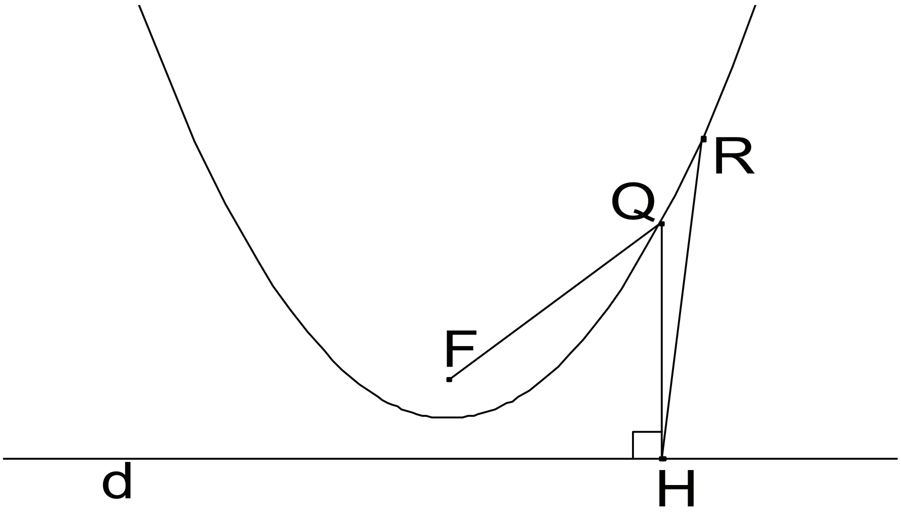


Fig. 1

Dimostrazione.
Infatti se i punti distinti della parabola Q e R avessero la stessa proiezione H sulla direttrice d, le due rette HQ e HR sarebbero entrambe perpendicolari a d nel punto H: ciò è assurdo perché in contraddizione con il teorema sull'unicità della perpendicolare a una retta data passante per un punto del piano.
q.e.d.

Lemma 2 La retta tangente a una parabola P di fuoco F e direttrice d in un suo punto Q è l'asse del segmento FH, dove H è la proiezione di Q su d.

Dimostrazione.
L'asse di un segmento è il luogo geometrico dei punti del piano che sono equidistanti dai suoi estremi. Dunque Q, essendo per definizione di parabola equidistante da F e da H, appartiene all'asse t del segmento FH (Figura 2).
Considerato un qualsiasi altro punto R della parabola e chiamata K la proiezione di R sulla direttrice d, per il lemma 1 sarà K $\neq$ H.

Risulterà allora FR ≅ RK (definizione di parabola) e RK < RH (nel triangolo rettangolo RHK il cateto RK è minore dell'ipotenusa RH) (Figura 3).

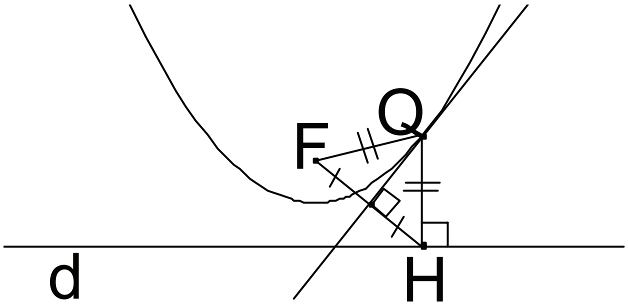


Fig. 2

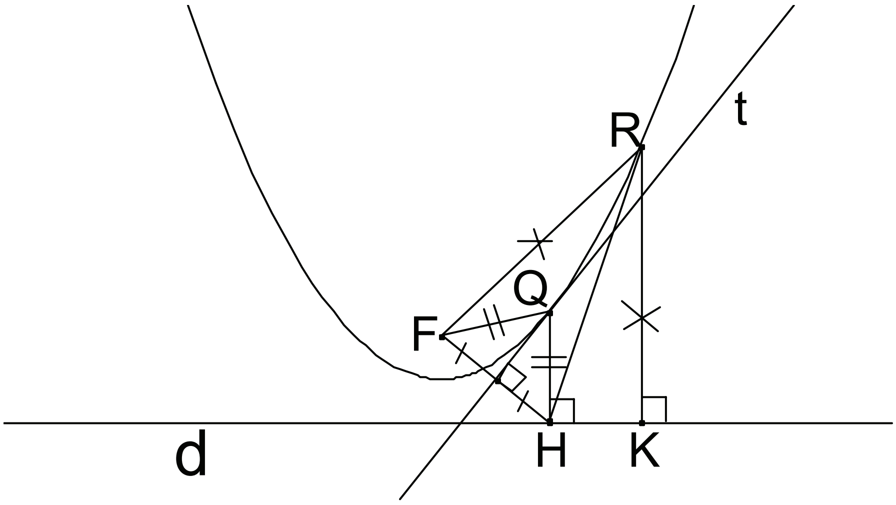


Fig. 3

Ciò implica che FR < RH: dunque R è un punto del piano non equidistante dagli estremi del segmento FH e pertanto R non appartiene all'asse di FH.

In conclusione la parabola P e la retta t hanno in comune il solo punto Q: dunque, per definizione, t è la tangente a P nel punto Q.

<u>q.e.d.</u>

1ª legge della riflessione Raggio incidente, raggio riflesso e normale alla superficie riflettente nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.

2ª legge della riflessione L'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione.

Teorema Il raggio luminoso emesso dal fuoco di un paraboloide e incidente il paraboloide stesso viene riflesso in direzione parallela all'asse di simmetria.

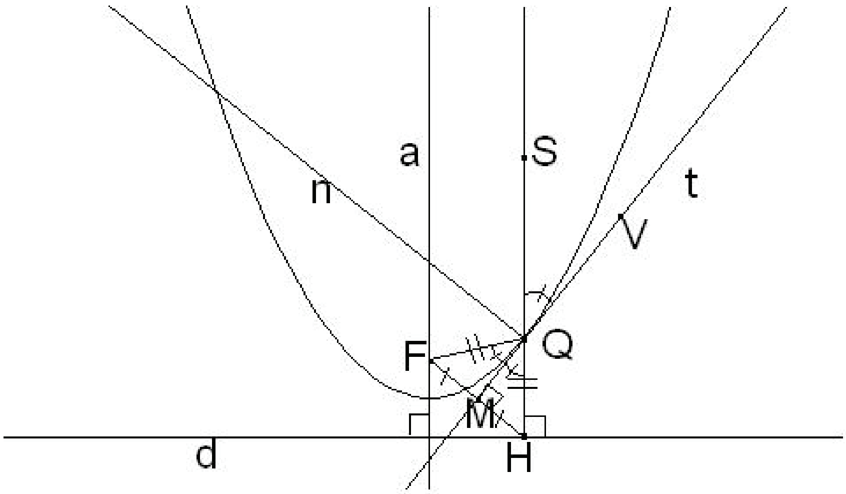


Fig. 4

Dimostrazione.
Sezioniamo il paraboloide con il piano su cui giacciono il raggio incidente FQ e la normale n alla cubica nel punto di incidenza Q, ottenendo una parabola.
Tracciamo per il punto Q prima la tangente t alla parabola e poi la retta SH parallela all'asse di simmetria a e quindi perpendicolare alla direttrice d (Figura 4).

Vogliamo dimostrare che la semiretta QS è il raggio riflesso del raggio incidente FQ, cioè vogliamo provare che $F\hat{Q}M \cong S\hat{Q}V$.
Per definizione di parabola sappiamo che FQ $\cong$ QH cioè che il triangolo FQH è isoscele, mentre dal lemma 2 si deduce che la tangente t alla parabola nel punto Q è asse del segmento FH.
Poiché nel triangolo isoscele l'asse relativo alla base coincide con la bisettrice dell'angolo al vertice si ha $F\hat{Q}M \cong M\hat{Q}H$, mentre $M\hat{Q}H \cong S\hat{Q}V$ perché angoli opposti al vertice.
Dunque, per la proprietà transitiva della congruenza, è $F\hat{Q}M \cong S\hat{Q}V$.
q.e.d.

Bibliografia

È quasi inutile riportare qui una vera e propria bibliografia, dato che gli argomenti trattati si trovano in tutti i testi di geometria e di fisica per le scuole superiori. A titolo di esempio citiamo:

[1] Trifone A. Bergamini M. (2000) *Manuale di Geometria*, Zanichelli, Bologna
[2] Zwirner G. Scaglianti L. (1998) *L'indagine matematica 3,* Cedam, Padova
[3] Caforio A. Ferilli A. (2001) *Dalla meccanica alla costituzione della materia 1* , Le Monnier, Firenze.